Вопросы промежуточной аттестации по геометрии в 10 классе.

Знать (без доказательства), показать на чертеже.

1. **Аксиомы. Следствия из аксиом стереометрии**

Аксиома А1
Для любой плоскости пространства существует точка, ей не принадлежащая.
Аксиома А2
В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии
Аксиома А3
Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит плоскость и притом только одна
Аксиома А4
Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости
Аксиома А5
Если две плоскости имеют общую точку (пересекаются), то они пересекаются по прямой.
Аксиома А6
Расстояние между любыми двумя точками пространства одинаково для любой плоскости, проходящей через эти точки
Ключевая задача. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
Теорема 2.1
Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит плоскость и притом только одна.
Теорема 2.2
Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

2. **Взаимное расположение двух прямых в пространстве**

а) Определение параллельных прямых. Две прямые в пространстве называют параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
б) Определение скрещивающихся прямых. Две прямые в пространстве называют скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
в) Теорема 4.1. Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.
г) Теорема 4.2. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна
д) Теорема 4.3 (признак скрещивающихся прямых) Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые — скрещивающиеся.
е) Ключевая задача. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая тоже пересекает эту плоскость.
ж) Все параллельные прямые, пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

3. Параллельность прямой и плоскости

а) Определение. Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек
б) Теорема 5.1 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не принадлежащая данной плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.

в) Теорема 5.2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
г) Теорема 5.3. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причём эти плоскости пересекаются по прямой, отличной от двух данных, то эта прямая параллельна каждой из двух данных прямых
д) Теорема 5.4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.
е) Ключевая задача. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а вторая прямая не принадлежит этой плоскости, то и вторая прямая параллельна данной плоскости.

ж) Ключевая задача. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.

4. Параллельность плоскостей

а) Определение. Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек
б) Теорема 6.1 (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

в) Теорема 6.2. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.
Следствие 1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.
Следствие 2. Все прямые, проходящие через данную точку вне данной плоскости и параллельные ей, лежат в одной плоскости.
г) Теорема 6.3. Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.
д) Ключевая задача. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

5. **Параллельное проектирование**

а) Пусть даны плоскость α, прямая l, пересекающая эту плоскость, и фигура F (рис. 7.11). Через каждую точку фигуры F проведём прямую, параллельную прямой l (если точка фигуры F принадлежит прямой l, то в качестве проведённой прямой будем рассматривать саму прямую l). Точки пересечения всех проведённых прямых с плоскостью α образуют некоторую фигуру F_1. Описанное преобразование фигуры F называют **параллельным проектированием**. Фигуру F_1 называют **параллельной проекцией фигуры F на плоскость α в направлении прямой l**. Также фигуру F_1 называют **изображением фигуры F на плоскости α в направлении прямой l**.

б) Теорема 7.1.Параллельной проекцией прямой является прямая; параллельной проекцией отрезка является отрезок

в) Теорема 7.2. Параллельной проекцией двух параллельных прямых являются или прямая, или две параллельные прямые. Параллельные проекции двух параллельных отрезков лежат на одной прямой или на параллельных прямых

г) Теорема 7.3. Отношение параллельных проекций отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, равно отношению самих отрезков.

6. **Угол между прямыми в пространстве**

а) Определение. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину того из углов, образовавшихся при их пересечении, который не пре восходит 90°.

б) Определение. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

в) Теорема 9.1. Угол между двумя пересекающимися прямыми равен углу между двумя другими пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

г) Определение. Две прямые в пространстве называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

7. **Перпендикулярность прямой и плоскости**

а) Определение. Прямую называют перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

б) Теорема 10.1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости)
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости

в) Теорема 10.2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

г) Теорема 10.3. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

д) Теорема 10.4. Через данную точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну е) Теорема 10.5. Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

8. Перпендикуляр и наклонная

а) Определение перпендикуляра и наклонной.
б) Теорема 11.1 Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра
в) Если точка, не принадлежащая плоскости многоугольника, равноудалена от его вершин, то проекцией этой точки на плоскость многоугольника является центр его описанной окружности.
г) Определение. Если точка не принадлежит плоскости, то расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если точка принадлежит плоскости, то считают, что расстояние от точки до плоскости равно нулю.
д) Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от плоскости.
е) Определение. Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называют расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.
ж) Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.
з) Определение. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называют расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

9. Расстояние между скрещивающимися прямыми

а) Определение. Расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b называют расстояние между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.
Ясно, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b также равно расстоянию между прямой b и плоскостью α или между прямой a и плоскостью β.
б) Для любых двух скрещивающихся прямых существует отрезок, перпендикулярный этим прямым, концы которого лежат на этих прямых.
Определение. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок, который перпендикулярен этим прямым и концы которого лежат на этих прямых
в) Если проекцией одной из скрещивающихся прямых на некоторую плоскость является точка, то расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от этой точки до проекции второй прямой на эту плоскость.

Задача 5. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, причём $a \perp \alpha$, точка O и прямая b_1 — соответственно проекции прямых a и b на плоскость α (рис. 11.11). Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки O до прямой b_1.

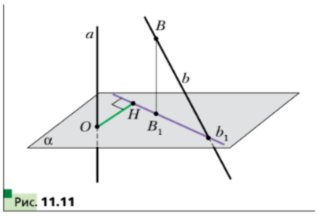

Рис. 11.11

10. Угол между прямой и плоскостью

а) Определение. Если прямая параллельна плоскости или принадлежит ей, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным 0°.
Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между такой прямой и плоскостью считают равным 90°.
Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то углом между такой прямой и плоскостью называют угол между прямой и её проекцией на плоскость

б) Если из одной точки к плоскости провести наклонные, образующие равные углы с плоскостью, то проекция данной точки на плоскость будет равноудалена от оснований наклонных.

в)

Задача 2. Прямая a образует с плоскостью π угол α, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Прямая b, принадлежащая плоскости π, образует с прямой a угол γ, а с её проекцией на плоскость π — угол β. Докажите, что $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

г) Если прямая не перпендикулярна данной плоскости, то она образует с плоскостью угол, который не больше любого угла между этой прямой и прямой, лежащей в данной плоскости

д) Равные наклонные, проведённые к плоскости из одной точки, образуют с этой плоскостью равные углы.

е) Если углы, образованные с плоскостью наклонными, проведёнными к ней из одной точки, равны, то и сами наклонные равны

11. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

а) Определение.
Отметим на ребре MN двугранного угла произвольную точку O . Через точку O в гранях двугранного угла проведём лучи OA и OB перпендикулярно ребру MN (рис. 14.5). Угол AOB, образованный этими лучами, называют линейным углом двугранного угла.

б) Определение.
Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.

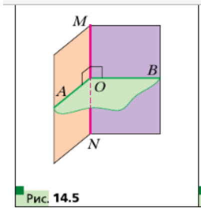

Рис. 14.5

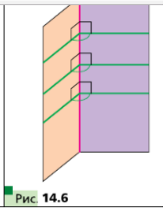
Рис. 14.6

в) Определение.
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называют величину того из образовавшихся двугранных углов, который не превосходит 90°.

г) Угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям

12. Геометрическое место точек пространства

а) Определение. Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество точек пространства, обладающих определённым свойством

б) Теорема18.1. Плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину, является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

в) Определение. Биссектором двугранного угла называют полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных двугранных угла
г) Теорема18.2. Биссектор двугранного угла является геометрическим местом точек, принадлежащих двугранному углу и равноудалённых от его граней.

13. Призма.

Определение. Многогранником называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Определение. Многогранник называют выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани

Было подмечено, что количества вершин В, рёбер Р и граней Г выпуклых многогранников подчиняются удивительной закономерности:
В-Р+Г=2.

Определение.

Многогранник, две грани которого— равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней— параллелограммы, называют n -угольной призмой
Определение.

Высотой призмы называют перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки плоскости одного основания на плоскость другого основания (рис.19.8). Длина высоты призмы равна расстоянию между плоскостями её оснований

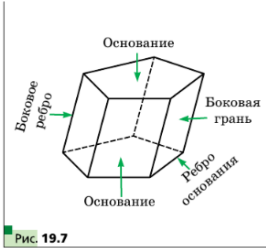

Рис. 19.7

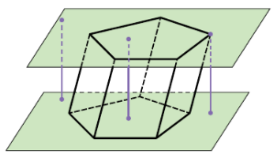
Рис. 19.8

Определение.

Призму называют прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания

Определение.

Призму называют правильной, если она является прямой и её основание— правильный многоугольник

Определение.

Рассмотрим выпуклую n-угольную призму (n >3). Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, пересекает основания призмы по диагоналям (рис. 19.10). Такое сечение называют диагональным сечением призмы

Определение. Площадью боковой поверхности призмы называют сумму площадей всех её боковых граней.

Теорема19.1

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра призмы

Рис. 19.11

Задача 1.
В наклонной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра сечения и бокового ребра.

14. Параллелепипед

Определение.

Параллелепипедом называют призму, основания которой являются Параллелограммами

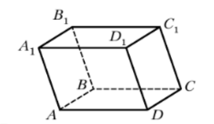

Рис. 20.1

Определение.

Параллелепипед называют прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания

Определение.

Прямой параллелепипед называют прямоугольным, если его основаниями являются прямоугольники.

Рис. 20.3

Теорема20.1
Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам

Следствие 1

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии

Следствие 2

Отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противолежащих граней параллелепипеда, пересекаются в одной точке.

Теорема 20.1
Квадрат любой диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений

15. Пирамида

Определение.

Многогранник, одна грань которого — n-угольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину, называют n-угольной Пирамидой.

Определение.

Высотой пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания

Рис. 21.1

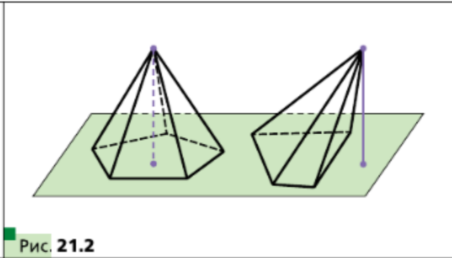
Рис. 21.2

Определение. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, называют диагональным сечением пирамиды.

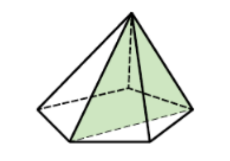
Рис. 21.3

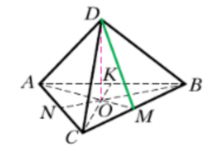

Рис. 21.4

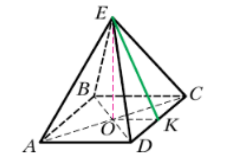

Рис. 21.5

Определение.
Пирамиду называют правильной, если её основание — правильный многоугольник и основание высоты пирамиды является центром этого многоугольника.
Определение.
Правильную треугольную пирамиду, у которой все грани равны, называют правильным тетраэдром.
Свойства правильной пирамиды
Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, все боковые грани правильной пирамиды— равные равнобедренные треугольники
Определение.
Апофемой правильной пирамиды называют высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.
Все апофемы правильной пирамиды равны.
Определение.
Площадью боковой поверхности пирамиды называют сумму площадей всех её боковых граней.
Теорема 21.1
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания и апофемы.
Свойства пирамиды

Если боковые рёбра пирамиды равны или боковые рё бра образуют равные углы с плоскостью основания, то проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр описанной окружности многоугольника, служащего основанием пирамиды

Ключевая задача 1.
Если все двугранные углы выпуклой пирамиды при рёбрах основания равны α, то:
1) проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной окружности многоугольника, служащего основанием пирамиды;
2) площадь боковой поверхности пирамиды вычисляют по формуле $S_{бок} = S_{осн}/\cos\alpha$
21.5
В правильной пирамиде:

1) боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания;

2) двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны
21.6
Если вершина пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания, то двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны.

21.7

Если вершина пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания, то все боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

16. Тетраэдр

Определение. Треугольная пирамида имеет четыре грани. С этим свойством связано другое название треугольной пирамиды — тетраэдр («тетраэдр» в переводе с греческого означает «четырёхгранник»). Любая грань тетраэдра служит его основанием.
Определение. Если прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то такой тетраэдр называют ортоцентрическим.
Лемма 1
Если тетраэдр имеет две пары перпендикулярных скрещивающихся рёбер, то остальные два ребра тоже перпендикулярны.
Лемма 2
Если тетраэдр имеет пару перпендикулярных скрещивающихся рёбер, то прямые, содержащие высоты тетраэдра, проведённые из концов одного из этих рёбер, пересекаются.
Теорема 23.1
Если тетраэдр имеет две пары перпендикулярных скрещивающихся рёбер, то он является ортоцентрическим.
Определение. Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, называют средней линией тетраэдра
Теорема 23.2

Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

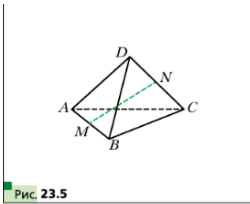

Рис. 23.5

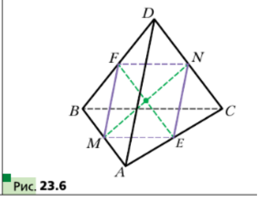

Рис. 23.6

Определение. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, называют медианой тетраэдра.

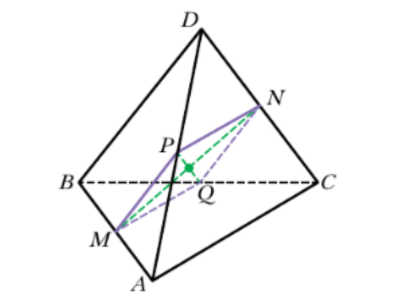

Рис. 23.7

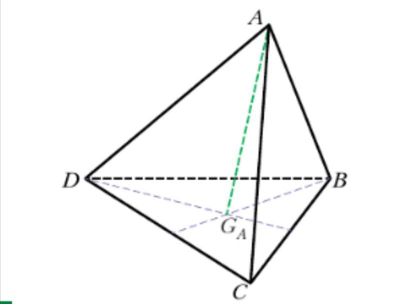

Рис. 23.8

Теорема 23.3

Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

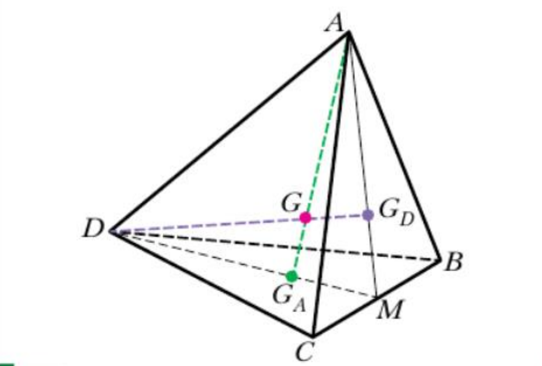

Рис. 23.9

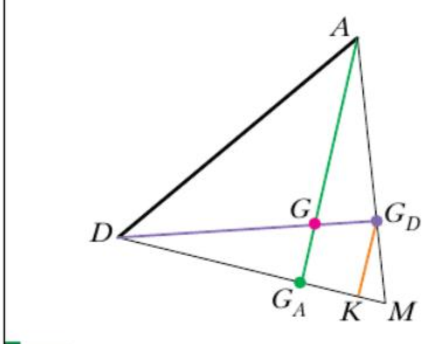

Рис. 23.10

Определение. Точку пересечения медиан тетраэдра называют центроидом тетраэдра.