ПЛАНИМЕТРИЯ.

Задачи для подготовки к экзамену по геометрии в 10 классе.

Планиметрические задачи (одна конфигурация с окружностью)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R*, касающаяся стороны *AC* в точке *D*, причём *AD* = *R*.
а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон *AB* и *BC* в точках *E* и *F*. Найдите площадь треугольника *BEF*. если известно, что *R = 2* и *CD* = 10.

2. Па гипотенузу *AB* прямоугольной) треугольника *ABC* опустили высоту *CH*. Из точки Н на катеты опустили перпендикуляры *НК* и *НЕ*.
а) Докажите, что точки *A, B, К* и *E* лежат на одной окружности.
б) Найдите радиус этой окружности, если *AB* = 24, СН=7.

3. Биссектриса угла ADC параллелограмма *ABCD* пересекает прямую *AB* в точке *E*. В треугольник *ADE* вписана окружность, касающаяся стороны *AE* в точке *К* и стороны *AD* в точке *T*.
а) Докажите, что прямые КТ и DE параллельны.
б) Найдите угол *BAD*, если известно, что сторона *AD* = 8 и КТ= 4.

4. Сторона *CD* прямоугольника *ABCD* касается некоторой окружности в точке *M*. Продолжение стороны *AD* последовательно пересекает окружность в точках Р и *Q*, прямая *BC* касается окружности, а точка Q лежит на прямой *BM*.
а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
б) Известно, что *CM* = 13 и *CD* = 18. Найдите сторону *AD*.

5. В параллелограмм вписана окружность.
а) Докажите, что этот параллелограмм ромб.
б) Эта окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 1. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

6. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении отрезка *AO* за точку *O* отмечена точка *К* так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.
а) Докажите, что четырёхугольник *OBКC* вписанный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника *OBКC,* если $\cos\angle BAC = 4/5$,. а *BC* = 96.

7. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке Н.
а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.
б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника *ABC,* до стороны *BC,* если $B_1C_1 = 9\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 30°$.

Планиметрические задачи (одна конфигурация без окружности)

1. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.
а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.
б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 24 , а один из его углов равен 45°.

2. Дан четырехугольник *ABCD*.
а) Докажите, что отрезки *LN* и *KM,* соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.
б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD,* если $KL = 6$, $KM = 4\sqrt{3}$, $\angle MKL = 30°$.

3. На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса BL равнобедренного треугольника *ABC с* основанием ВС является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.
а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.
б) Известно, что $\cos\angle ABC = 2/3$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

4. Точка M - середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части.
а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.
б) Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.
5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.
а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
б) Найдите BC, если $AH = 10\sqrt{3}$ и $\angle BAC = \mathbf{30°}$.
6. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и AC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.
а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.
б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3.
Планиметрические задачи (две конфигурации)
1. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.
2. Дан треугольник со сторонами 20, 20 и 24. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.
3. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ раины 7 и 25 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, ранен 12, средняя линия трапеции равна 18. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.
4. На прямой, содержащей биссектрису $\boldsymbol{AD}$ прямоугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ с прямым углом $\boldsymbol{C}$**,** взята точка $\boldsymbol{E}$**,** удаленная от вершины $\boldsymbol{A}$ на расстояние, равное $\sqrt{17}$. Найдите площадь треугольника $\boldsymbol{BCE}$**,** если $\boldsymbol{BC} = 8$, $\boldsymbol{AC} = 15$.
5. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.
а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 4 и 36.
6. Окружности радиусов 5 и 8 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Пря мая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую - в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2. если $\angle ABO_1 = 15°$.
7. Окружности радиусов 9 и 15 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке L. Прямая, проходящая через точку L, вторично пересекает меньшую окружность в точке K, а большую - в точке M. Найдите площадь треугольника KMO_1, если $\angle LMO_2 = 15°$.
8. Окружности радиусов 13 и 35 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом и точке C, AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.
9. Окружности радиусов 1 и 15 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K, MO_1 и NO_2 - параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle MO_1O_2 = 120°$. Найдите MN.